MA1 Domácí úkol 4. – derivace funkce - řešení

Určete definiční obory a obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte :

1. $f(x)=e^{-x^2}\sin x$; $D_f = \mathbb{R}$; užijeme zde „vzorec" pro derivaci součinu a pro derivování funkce e^{-x^2} věty o derivaci funkce složené (dále VDSF) :

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\sin x\right)' = \left(e^{-x^2}\right)'\sin x + e^{-x^2}(\sin x)' = e^{-x^2}(-x^2)'\sin x + e^{-x^2}(\sin x)' =$$

$$= e^{-x^2}\left(-2x\sin x + \cos x\right), \quad x\in\mathbb{R} \quad (\text{tj. } D_{f'} = \mathbb{R} = D_f)$$

2. $f(x)=x^2\ln(arctg 2x)$; $D_f = \{x\in\mathbb{R};\ \operatorname{arctg} 2x > 0\} = (0,+\infty) = D_{f'}$; opět užijeme vzorec pro derivaci součinu funkcí a pro funkci $\ln(\operatorname{arctg}(2x))$ opět VDSF :

$$f'(x) = (x^2)'\ln(\operatorname{arctg}(2x)) + x^2\left(\ln(\operatorname{arctg}(2x))\right)' =$$

$$= 2x\ln(\operatorname{arctg}(2x)) + x^2\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)}\cdot\left(\operatorname{arctg}(2x)\right)' =$$

$$= 2x\ln(\operatorname{arctg}(2x)) + x^2\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)}\cdot\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2$$

$$\left(\left(\operatorname{arctg}(2x)\right)' \underset{VDSF}{=} \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2x)' = \frac{1}{1+4x^2}\cdot 2 \right)$$

3. $f(x)=\dfrac{3}{\left(x^2-1\right)^2}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} = D_{f'}$; lze derivovat jako „podíl", nebo, asi lépe, jako funkci složenou :

$$f'(x) = \left(3\,(x^2-1)^{-2}\right)' = 3\left((x^2-1)^{-2}\right)' = 3\cdot(-2)(x^2-1)^{-3}\cdot(x^2-1)' =$$

$$= -6\,(x^2-1)^{-3}\cdot 2x \quad \left(= \frac{-12x}{(x^2-1)^3} \right)$$

4. $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$: $\mathcal{D}f = \{ x\in\mathbb{R};\ x\neq 2 \text{ a } \frac{x+1}{x-2}\geq 0 \} = (-\infty,-1\rangle \cup (2,+\infty)$;

derivujeme opět jako funkci složenou a dále užijeme derivaci „zlomku":

$$f'(x)=\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\right)' = \left(\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}$$

– a pozor! zde vidíme, že „musí" být $x\neq 1$, tj.:

$\mathcal{D}f' = (-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

A ještě poznámka: $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$ jen v intervalu $(2,+\infty)$!

Tedy „nedohrabme" $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ v $\mathcal{D}f$! ($\sqrt{\frac{a}{b}} \neq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ pro vš. a,b, kde je $\sqrt{\frac{a}{b}}$ definována!)

5. $f(x)=\cos\sqrt{x}$; $\mathcal{D}f = \langle 0,+\infty)$

derivujeme jako funkci složenou (VDSF):

$$f'(x) = (\cos\sqrt{x})' = -\sin(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

, ale pro $x\in(0,+\infty)$!

6. V příkladu 5. vypočítejte i derivaci v bodě $x = 0$ zprava

Zde lze užít buď definice (a l'Hospitalovo pravidlo)

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{\cos\sqrt{x}-\cos 0}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} = „\frac{0}{0}" \underset{l'H}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{-\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$ (neboť $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \underset{VLSF}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ (T))

nebo užitím věty o „dopočítávání" derivací (důsledek l'Hospitala)

f je spojitá v bodě 0+, tedy lze:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$ (limita stejná „jako nahoře")

7. $f(x)=\left(1+\frac{3}{x}\right)^x \underset{\text{definice}}{=} e^{x \cdot \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$, tedy $\mathcal{D}f=\{x\in\mathbb{R};\ 1+\frac{3}{x}>0\}=$
$=(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$;

a $f'(x)$ – derivujeme f jako funkci složenou:

$$\underline{f'(x)}=\left(e^{x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}\right)' \underset{\text{VDSF}}{=} e^{x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}\cdot\left(x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)'=$$

$$=\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\left((x)'\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)+x\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)'\right)=$$

$$=\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{x}}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)\right)=$$

$$=\underline{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\cdot\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\frac{3}{x+3}\right),\quad \mathcal{D}f=\mathcal{D}f'}$$

8. Spočítejte limitu $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4x^2+1)}{\sin x^2}$. – užijeme l'Hospitalovo pravidlo (a VDSF):

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4x^2+1)}{\sin(x^2)}} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"} \underset{l'H.}{=} \lim\frac{\left(\ln(4x^2+1)\right)'}{\left(\sin(x^2)\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4x^2+1}\cdot 8x}{\cos(x^2)\cdot 2x} = \lim_{x\to 0} 4\cdot\frac{1}{(4x^2+1)\cos(x^2)} \underset{AL}{=} \underline{\underline{4}}$$

lze „krátit x"

(a lze i pomocí „tabulkové" limity bez „l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4x^2+1)}{\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(4x^2+1)}{4x^2}\cdot 4x^2}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot x^2}=4,$$

neboť $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=1$ (T+VLSF)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4x^2+1)}{4x^2} \underset{\text{VLSF}:\ 4x^2=t}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t} \underset{(T)}{=} 1\ )$$

9. Spočítejte limitu $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$: opět i zde z definice $f(x)^{g(x)}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \underset{\text{VLSF}}{\lim_{y\to 3}} e^{y} = e^3$$

limita vnitřní funkce:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = „\infty\cdot 0" = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{t\to\infty\\ \frac{3}{x}=t}} \underbrace{\frac{\ln(1+t)}{t}}_{\to 1\,(T)}\cdot 3 =$$

$$= 3\ ;$$

(obecně lze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$, $a\in R$)

10. Vyšetřete, zda lze v bodě $a=0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f , která je pro $x\neq 0$ dána předpisem

$$f(x)=\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

Funkce f je spojitá v bodě $x_0\in D_f$, když platí: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; tedy, funkci f, pokud není definovaná v bodě x_0, ale je definovaná v $P(x_0)$, je možné v bodě $x=x_0$ dodefinovat funkci f spojitě, pokud $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L\in R$, a tak, aby $f(x_0)=L$;

Tedy zde:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = „\frac{0}{0}" \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos x}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \underset{AL}{=} -\frac{1}{2},$$

2) tedy, je možné f spojitě v bodě $a=0$ dodefinovat:

$$f(0)=-\frac{1}{2}$$